Fibonacci-Tonmengen: Über Mod 12 hinaus

Casey Mongoven

0.0 Einleitung

In meinem Aufsatz *Fibonacci-Tonmengen* versuchte ich unter Verwendung der gleichschwebenden Zwölftonstimmung eine gründliche Anwendung der Fibonacci-Zahlen auf Tonstruktur zu schaffen. Jedoch sind Fibonacci-Tonmengen nicht auf eine einzige Stimmung beschränkt; dieser Aufsatz setzt die Untersuchung der Fibonacci-Tonmengen fort.

1.0 Fibonacci-Mod 24

In Anbetracht der in meinem vorherigen Aufsatz beschriebenen Beziehung der Prim-Tonmengen zu den Untermengen scheint es mir interessant, die erste Obermenge der Mod 12-Sammlung, also die Mod 24-Sammlung, zu diskutieren. Und weil die Verwendung der vierundzwanzigtönigen Skala schon allgemein üblich ist,[1] scheint es mir gelegen mit der Mod 24-Sammlung anzufangen. Erst sehen wir uns die klassische Fibonacci-Sequenz an. In der Mod 12-Sammlung gibt es nur eine Primform der Fibonacci-Sequenz, in Mod 24 gibt es zwei durch Multiplikation mit 5 in Beziehung stehende Primformen:

f1

0 1 1 2 3 5 8 13 21 10 7 17 0 17 17 10 3 13 16 5 21 2 23 1

0 23 23 22 21 19 16 11 3 14 17 7 0 7 7 14 21 11 8 19 3 22 1 23

f5

0 5 5 10 15 1 16 17 9 2 11 13 0 13 13 2 15 17 8 1 9 10 19 5

0 19 19 14 9 23 8 7 15 22 13 11 0 11 11 22 9 7 16 23 15 14 5 19

Die Periode von f1 und f5 ist 24, die beschränkte Periode ist 12, der Multiplikator ist 17. Im vorherigen Aufsatz wurde erörtert, dass alle Multiplikationen eines defektiven Modulus auch defektiv sind; 12 ist defektiv, in der Folge ist es auch 24. Tabelle 1 zeigt die Mod 24-Sammlung, Tabelle 2 die Invers-Fibonacci-Mod 24-Sammlung. Die Mod 24-Sammlung enthält $24^2 = 576$ geordnete Zweiklänge.

DEFINITION. *Sei n eine ganze Zahl. Sei f_n eine Fibonacci-Sequenz (ohne einen Modulus) mit folgender definierender Beziehung: $f_n + f_{n+1} = f_{n+2}$ für die aufeinander folgenden Glieder der Sequenz $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, und sei $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$. Sei l_n eine Lucas-Folge mit derselben definierenden Beziehung der Fibonacci-Sequenz $l_n + l_{n+1} = l_{n+2}$, und seien in der Sequenz $l_0 = 2$ und $l_1 = 1$. Sei m eine Zahl, die als Modulus verwendet wird.*

1.1 Einfache Eigenschaften der Mod 24-Sammlung

In der Mod 24-Sammlung fallen uns zwei neue wichtige Sequenzen auf. Die Sequenz {3, 1, 4, 5, 9, 14, 23, 37, 60, 97, 157, 254, …}, welche wir e_n nennen,[2] hat die Beziehung $f_n + l_{n+1} = e_{n+2}$. Und die Sequenz {5, 2, 7, 9, 16, 25, 41, 66, 107, 173, 280}, welche wir m_n nennen, hat die Beziehung $l_n + e_n = m_n$. Weitere Beziehungen zwischen diesen Sequenzen sind in den Anmerkungen zu finden.[3]

In der Mod 12-Sammlung wurde erwähnt, dass wegen eines defektiven Modulus in f1 Restklasse 6 und in l1 die Restklassen 0 und 9 fehlen. Der Klangeffekt des defektiven Modulus ist in der Mod 24-Sammlung deutlich gesteigert. Tabelle 3 verdeutlicht, wie oft jede einzelne Restklasse in allen Primmengen vorkommt. f1 hat die ungeordnete Tonmenge {0, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 13, 16, 17, 21, 23}. Multiplizierten wir diese Menge mit 5, wäre das Ergebnis die ungeordnete Tonmenge von f5, also {0, 1, 2, 5, 8, 9, 10, 11, 13, 15, 16, 17, 19}. Die Kardinalzahl beider Mengen ist 13. In l1 ist die ungeordnete Tonmenge {1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 11, 13, 17, 18, 19, 20, 23}; in l5 haben wir {1, 2, 4, 5, 7, 10, 11, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 23}. Beide Mengen haben die Kardinalzahl 14. e1 erzeugt {1, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 13, 14, 17, 20, 22, 23} und e5 {1, 4, 5, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22}, und beide haben die Kardinalzahl 13. m1 und m5 haben eine faszinierende Eigenschaft: ihre ungeordnete Menge ist gleich sich selbst, wenn sie mit 5 multipliziert wird, nämlich {1, 2, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 17, 18, 19, 21, 23}. m1 und m5 haben die Kardinalzahl 15, welche die größte Kardinalzahl der Mod 24-Sammlung ist. Jetzt stellt sich die Frage: Was bestimmt die Anzahl der Restklassen in einer Menge? Bei der Beantwortung dieser Frage müssen wir einige weitere einfache Eigenschaften von Fibonacci-Sequenzen und Kongruenzen modulo *m* in Betracht ziehen.

Die Anzahl einzigartiger Restklassen in einer Fibonacci-Tonklassenmenge bezeichnet die Anzahl von Zahlen kleiner als der Modulus *m*, die Restklassen modulo *m* von dieser Fibonacci-Sequenz sind.

Wenn sich eine Resklasse t in einer Fibonacci-Sequenz g_n (mod m) befindet, muss es ein Element $x \equiv t$ (mod m) in dieser Sequenz g_n geben. Und da g_n unendlich ist, kommt $x \equiv t$ (mod m) unendlich oft vor. Wenn eine Resklasse t n-mal in der Periode p vorkommt, muss es n einzigartige Zahlen geben, die der Kongruenz $x \equiv t$ (mod m) für alle p Elemente in der Sequenz g_n entsprechen.

2.0 Intervallzyklen

Das Verständnis der Intervallzyklen ist hilfreich für dasjenige der Fibonacci-Tonmengen; sie haben viele Ähnlichkeiten mit den Fibonacci-Tonmengen.[4] Tabelle 4 zeigt die Mod 24-Intervallzyklen. Intervallzyklen sind geordnete Mengen; ein Unterschied zwischen den Inversionen kann aufgezeigt werden: Z.B. $C13_0$ ist die Inversion von $C11_0$. Inversion im Falle der Intervallzyklen bedeutet dasselbe wie Rückläufigkeit.[5] Die Anzahl von Primzyklen in einer Intervallzyklen-Sammlung wird durch die Anzahl der Zahlen kleiner als der Modulus, die relativprim zu dem Modulus sind, bestimmt. Diejenigen, die ein bisschen Zahlentheorie beherrschen, werden diese Anzahl als die Euler-Funktion ø(m) erkennen.[6] Für m = 24 ist ø(m) = 8. Die Euler-Funktion bezeichnet, für eine gleichschwebende Stimmung, die Anzahl von Intervallen, von denen ein vollständiges Restesystem hergeleitet werden kann.[7] Die Menge von ø(m) Restklassen bildet ein reduziertes Restesystem modulo m.[8] In der Vierundzwanzigtonstimmung ist das reduzierte Restesystem {1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23}. Die Anzahl der Unterzyklen in einer Intervallklassen-Sammlung ist gleich m – ø(m). In dieser Sammlung gibt es 8 Primzyklen und 16 Unterzyklen. Es gibt 8 gleichschwebende Untermengen in der Mod 24-Sammlung, nämlich 24, 12, 8, 6, 4, 3, 2, und 1. Die Anzahl von gleichschwebenden Untermengen für einen Modulus m ist gleich der Anzahl der positiven Divisoren von m.

3.0 Primmengen und Untermengen

Die Primmengen in einer Mod m-Sammlung sind die Mengen, die nur zu dem Modulus m gehören. In solchen Sammlungen sind alle Zweiklänge relativprim zu dem Modulus.[9] Es gibt 17 einzigartige Mengen in dieser Sammlung; 8 davon sind Primmengen. Für jede Primmenge gibt es eine zweite, die mit dieser durch Multiplikation mit 5 in Beziehung steht; solche Mengen nennen wir kongruente Primmengen. Es gibt 4 Paare von aus den Sequenzen $\{f_n, l_n, e_n, m_n\}$ gebildeten kongruenten

Primmengen. Für alle Primmengen ist die Periode 24,[10] der Multiplikator 17 und die beschränkte Periode 12. Man kann in allen Primmengen die Beziehungen zwischen den Multiplikationen mit 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19 und 23 von der relativen Position der Zweiklänge {0, 1}, {0, 5}, {0, 7}, {0, 11}, {0, 13}, {0, 17}, {0, 19}, und {0, 23} in f1 und f5 unterscheiden. Alle Primmengen in den Tabellen 8 und 9 sind so arrangiert, dass Mutiplikationen mit 5 vertikal ausgerichtet sind.

Die erste gleichschwebende Untermenge der Vierundzwanzigtonskala ist die Zwölftonskala; alle Mengen, die sich in der Zwölfton-Sammlung befinden, scheinen auch in der Vierundzwanzigton-Sammlung auf.[11] 5 war der Multiplikator in der Mod 12-Sammlung; alle Untermengen der Mod 24-Sammlung haben ebenso diesen Multiplikator. In allen geraden Mengen – d.h. Mengen, deren Elemente sich in der Mod 12-Sammlung befinden - ist das Ergebnis einer Multiplikation mit 17, da $17 \equiv 5 \pmod{12}$ ist, gleich dem Ergebnis einer Multiplikation mit 5. Obwohl man nicht sagen kann, dass der Multiplikator für die ganze Mod 24-Sammlung 17 ist, ergibt eine Multiplikation mit 17 immer einen Teil derselben Sequenz.

Die Beziehungen von Untermengen zu Obermengen ist komplizierter in der Mod 24-Sammlung als in Mod 12. {f1, f5, e1, e5} werden zur gleichen Untermenge, wenn sie mit derselben Zahl multipliziert werden, aber sie werden nicht zurselben Untermenge wie {f1, f5, e1, e5}, wenn sie mit 2 oder 3 multipliziert werden. Die Beziehungen zwischen Primmengen und Untermengen werden in Tabelle 5 gezeigt. In der Mod 24-Sammlung hat die Lucas-Folge einige Untermengen, die nicht durch Multiplikation mit der Fibonacci-Sequenz in Beziehung stehen; man erinnere sich daran, dass l1 die einzige Menge in der Mod 12-Sammlung ist, die nicht durch Multiplikation mit der Fibonacci-Sequenz in Beziehung steht. Das gilt auch für f1 and l1 in der Mod 8-Sammlung.

3.1 Eine weitere bedeutende Untersammlung

Die Mod 8-Sammlung enthält $8^2 = 64$ geordnete Zweiklänge. Die Mod 8-Primmengen sind die einzigen Untermengen in der Mod 24-Sammlung, die nicht auch in der Mod 12-Sammlung aufscheinen. Die Mod 8-Intervallzyklen werden in Tabelle 6 gezeigt. Hier ist $\phi(8) = 4$ und das reduzierte Restesystem ist {1, 3, 5, 7}. In der Mod 24-Sammlung bleiben f1 (mod 24) und l1 einzigartig, wenn sie mit 3 multipliziert werden. Die Primformen von Fibonacci-Sequenz und Lucas-Folge modulo 8 sind:

	0	1	1	2	3	5	0	5	5	2	7	1		2	1	3	4	7	3	2	5	7	4	3	7
f1													l1												
	0	7	7	6	5	3	0	3	3	6	1	7		6	7	5	4	1	5	6	3	1	4	5	1

Mit dem Modulus 8 ist die Periode 12, die beschränkte Periode 6 und der Multiplikator 5. Es wurde vorher erwähnt, dass alle Untermengen der Mod 24-Sammlung den Multiplikator 5 haben. 8 ist ein defektiver Modulus; die Restklassen 4 und 6 fehlen in f1, und in l1 fehlen die Restklassen 0 und 6. Die Mod 8-Sammlung wird in Tabelle 7 gezeigt. Aufgrund ihrer gemeinsamen Divisoren gibt es alle Untermengen der Mod 8-Sammlung auch in der Mod 12-Sammlung.

4.0 Gleichbleibende Drei- und Vierklänge in der Mod 24-Sammlung

Die definierende Beziehung $f_n + f_{n+1} = f_{n+2}$ und das Kommutativgesetz der Addition bestimmen, dass sich alle geordneten Zweiklänge in einem gleichbleibenden Dreiklang befinden (z.B. {20, 4, 0} und {4, 20, 0}). Aufgrund der definierenden Beziehung ist das Element, das einem geordneten Dreiklang vorangeht, gleich der Inversion seines gleichbleibenden Gegenstückes (z.B. {1, 3, 4, 7} und {23, 4, 3, 7}). Tabelle 8 zeigt Beziehungen zwischen gleichbleibenden Dreiklängen in den Primmengen. In dieser Tabelle müssen nur die ersten 12 gleichbleibenden Zweiklänge mit einer Verbindungslinie markiert werden, denn ihre Multiplikation mit 17 ergibt denselben Teil der beschränkten Periode des gleichbleibenden Gegenstückes. Die Positionen der gleichbleibenden Dreiklänge in f5 (oder l1, e5, oder m5) können auf dieselbe Weise festgestellt werden; sie entsprechen genau den Stellen ihrer kongruenten Gegenstücke, denn sie sind vertikal ausgerichtet. Die punktierte Linie im ersten Beispiel zeigt diese Kongruenz.

Dreiklänge, die mit einem Identitäts-Zweiklang - d.h. mit einem Zweiklang, dessen zwei Restklassen identisch sind – anfangen, also $\{x, x, y\}$, haben gar kein gleichbleibendes Gegenstück, mit einer Ausnahme, denn der Dreiklang {12, 12, 0} schneidet sich mit seinen zwei gleichbleibenden Gegenstücken und hat drei mögliche Reihenfolgen. Es gibt 23 solche Dreiklänge. Alle Dreiklänge, die sich mit ihren gleichbleibenden Gegenstücken schneiden, haben immer mit einer Identität wie z.B. $\{x, 0, x\}$ und $\{0, x, x\}$ zu tun. In den Primmengen gibt es 190 Paare gleichbleibender Dreiklänge, die sich nicht

miteinander schneiden: Sie nehmen die Form {*x, y, z*} und {*y, x, z*} an; die Gesamtzahl solcher Dreiklänge ist 263.[12]

Tabelle 9 zeigt gleichbleibende Vierklänge in Primmengen. Alle Moduli, die durch 2 oder 3 teilbar sind, haben zur Folge gleichbleibende Vierklänge. In dieser Sammlung haben alle Vierklänge, deren zweites Element 8 (oder 16) ist, zwei gleichbleibende Gegenstücke. Die Teilung des Modulus in dieser Sammlung ergibt die Intervallzyklen $C12_x$ und $C8_x$. Alle Fälle, in denen ein Vierklang an drei verschiedenen Stellen vorkommt, haben immer mit $C8_x$ zu tun. Das zweite Element ist immer 8 (oder 16); $C8_3$ ist eine Untermenge von {3, 8, 11, 19}, {11, 8, 19, 3} und {19, 8, 3, 11}. Es gibt 8 solche Vierklänge in der Sammlung. Da e1, e5, l1, und l5 keine Restklasse 8 haben, enthalten sie gar keine gleichbleibenden Vierklänge dieser Art. Vierklänge, deren zweites Element 12 ist, haben ein einziges gleichbleibendes Gegenstück (z.B. {12, 17, 5, 22} und {12, 5, 17, 22}). Die einzigen Primmengen, die Restklasse 12 enthalten, sind e1 und e5: Diese Mengen enthalten alle primen gleichbleibenden Vierklänge dieser Art. l1 und l5, die weder Restklasse 8 noch 12 haben, enthalten folglich keine gleichbleibenden Vierklänge.

5.0 Fibonacci-Tonmengen mit 24 Tönen

Mit 24 Tönen in der Oktave können sich nonmodulare Fibonacci-Mengen ein bisschen weiter in die Sequenz erstrecken; der Goldenen Schnitt kann genauer bezeichnet werden. Diese Mengen werden von den ersten zwei Zahlen *n* und *m* klassifiziert, denn sie bestimmen die ganze Sequenz. Das Symbol $F_{n, m}t$ bezeichnet Fibonacci-Tonmengen; *t* bezeichnet die Kardinalzahl der Menge. Invertierte Mengen werden von $F_{-n, -m}t$ bezeichnet, so dass die Menge $F_{-1, -2}8$ = {-1, -2, -3, -5, -8, -13, -21, -34}. In Normalform sind *n* und *m* kleiner als 24. Tabelle 10 zeigt ein Beispiel von Fibonacci-Tonmengen, das auf l1 basiert. Tabelle 11 zeigt die Invers-Tonmengen, die auf –f1 basieren. Die Grenzen dieser Mengen wurden durch 224 Vierteltöne festgelegt; zweimal so weit auseinander wie die Grenzen in den Mod 12-Tabellen des vorherigen Aufsatzes. Mit 24 Tönen in der Oktave kann die Menge $F_{0, 1}13$ {0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144} den Goldenen Schnitt ziemlich genau bezeichnen: 89/144 = 0,618055556… .

6.0 Einige Worte über Fibonacci-Mod 24

Die gleichschwebende vierundzwanzigtönige Stimmung ist für unsere Ohren etwas sehr Besonderes, denn sie ist die erste Obermenge der Zwölfton-Skala. Und die Ergebnisse, die mit der Verwendung der vierundzwanzigtönigen Fibonacci-Mengen erreicht werden können, sind ausgezeichnet. Die Mod 24-Sammlung klingt unbestritten nach Fibonacci. Diese Ähnlichkeit im Klang ist anders als diejenige, die man mittels Division einer Zwölfton-Menge durch 2 produzieren kann. Denn in der Fibonacci-Sammlung mod 24 haben wir nicht einfach die Mod 12-Sammlung durch 2 dividiert; dies schafft eine ganz andere Sammlung nur mit Quasi-Fibonacci-Eigenschaften.[13] Aber die Klangähnlichkeit in mod 24 ist ausschließlich auf die definierende Beziehung $f_n + f_{n+1} \equiv f_{n+2} \pmod{m}$ zurückzuführen.

7.0 Überblick über die Mod 19-Sammlung

Eine andere gleichschwebende Stimmung, die in letzter Zeit viel Aufmerksamkeit auf sich gezogen hat, ist die Neunzehntonstimmung.[14] Ich will sie hier wegen ihres starken Gegensatzes zu der Vierundzwanzigtonstimmung diskutieren, zwar nicht so ausführlich wie die letzte, aber ich will die Wirkung eines Primmodulus auf Fibonacci-Tonmengen zeigen.[15] Mit dem Verständnis dieser Stimmung hätte der Leser eine gute Vorstellung der Möglichkeiten, die die Fibonacci-Tonmengen umfassen.

Tabelle 12 zeigt Intervallzyklen mit Modulus 19. Hier gilt ø(19) = 18, in der Folge sind alle Zyklen außer $C0_0$ und alle Fibonacci-Mengen in der Mod 19-Sammlung prim. f1 (mod 19) wird unten gezeigt, die ganze Sammlung in Tabelle 13.

	0	1	1	2	3	5	8	13	2	15	17	13	11	5	16	2	18	1
f1																		
	0	18	18	17	16	14	8	6	17	4	2	6	8	14	3	17	1	18

Diese Sammlung enthält $19^2 = 361$ geordnete Zweiklänge; die Mehrheit der Sammlung ($18^2 = 324$ der geordneten Zweiklänge) besteht aus Multiplikationen von f1. Mit Modulus 19 sieht man, dass sich die Lucas-Folge in der Mitte der Sequenz befindet {f9: 2, 1, 3, 4, 7, 11, …}, wenn die Fibonacci-Sequenz mit 9 multipliziert wird; der Mittelpunkt aller Fibonacci-Sequenzen modulo 19 ist die Lucas-Folge. Alle Multiplikationen von f1, außer {f1 * 0}, haben die Periode 18. Keine Multiplikationen von f1 haben eine beschränkte Periode. 19 ist ein defektiver Modulus; alle primen Moduli sind defektiv, ausgenommen 2, 3,

5 und 7.[16] Da der Modulus 19 nicht durch 2 oder 3 teilbar ist, gibt es keine gleichbleibenden Vierklänge in der Sammlung.

Kurios sind die übrigen Mengen dieser Sammlung, g1 und h1. In der Mod 19-Sammlung gibt es 36 geordnete Zweiklänge, die nicht durch Multiplikation mit f1 in Beziehung stehen. Diese Mengen verhalten sich ganz anders als die Mengen, die zuvor diskutiert wurden. g1 hat eine Periode von 9; dies zeigt, dass in bestimmten Fällen einige allgemeine Fibonacci-Sequenzen eine ungerade Periode haben. h1 enthält ihre eigene Inversion. Beide Mengen enthalten alle Restklassen außer 0; das heißt, dass in der Sammlung von Multiplikationen von f1 alle Restklassen gleich oft vorkommen. In der Sammlung von Primmengen kommt 0 einmal weniger als andere Restklassen vor. Beide diese Eigenschaften gelten für alle primen Moduli.[17] g1 und h1 haben die beschränkte Periode 1, g1 hat den Multiplikator 5, und h1 hat den Multiplikator 15. Sie sind gleich einem Teil von sich selbst, wenn sie mit jeglicher Zahl außer 0 multipliziert werden, somit enthalten sie 18 ähnliche (kongruente) Mengen.

8.0 Abschließende Bermerkungen

Mit diesem Aufsatz erkennt man die große Wirkung eines Primmodulus auf Fibonacci-Tonmengen und chromatische Musik im Allgemeinen. Obgleich der Klang der Mod 19-Sammlung sehr "nach Fibonacci klingt", gibt es keine Untermengen; alle Mengen sind prim und ein Großteil der Sammlung besteht aus Multiplikationen von f1. Aus diesem Grund klingen die verschiedenen Mengen der Sammlung einander ähnlicher. Dies kann im musikalischen Sinne als Vorteil oder Nachteil betrachtet werden. Dagegen schafft die Mod 24-Sammlung, wegen ihres großen Sortiments an Untermengen, unglaublichen Klangreichtum.

Dieser Aufsatz wirft Fragen darüber auf, was über diese Modulus-Grenzen hinaus existiert. In je kleinere Intervalle wir die Oktave teilen, desto mehr nähern Fibonacci-Tonmengen sich der Goldenen Tonmenge an; in dieser Menge betragen alle aufeinander folgenden Intervalle genau $(1 + \sqrt{5})/ 2$ des vorherigen Intervalls.[17] Mein nächster Aufsatz wird die Erforschung der Fibonacci-Tonmengen fortsetzen und die Goldenen Tonmengen ausführlich untersuchen.

Anmerkungen

1. Die Begeisterung von Musikern für Vierteltöne stammt aus der Barockzeit. Giuseppe Tartini (1692 – 1770) schlug Symbole für Vierteltöne vor, die in der heutigen Musik verwendet werden. Eine interessante Schrift über Mikrotonalität ist in dem Vorwort zu Gardner Reads *20th Century Microtonal Notation* zu finden. Neben vielen anderen haben die folgenden Komponisten Vierteltöne häufig verwendet: Charles Ives, Krzysztof Penderecki, Witold Lutoslawski, Brian Ferneyhough, Iannis Xenakis, Cristóbal Halffter und Alois Hába.
2. Es wurde e_n als Symbol für die Sequenz {3, 1, 4, 5, 9, 14, 23, 37, 60, 97, 157, 254, …} gewählt, denn in der Mod 24-Sammlung enthält diese Sequenz auch die Evangelisten-Sequenz {3, 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, 81, 131, 212 …}, wenn sie mit 5 multipliziert wird; aber nicht vergessen: hier ist $e_0 = 3$, und $e_1 = 1$.
3. Diese vier Sequenzen sind die Basis der Mod 24-Tonklassenmengen. Andere Beziehungen zwischen diesen Sequenzen sind z.B. $f_n + f_{n+5} = e_{n+3}$, $l_n + f_{n+5} = m_{n+2}$ und $e_n + m_{n+1} = f_{n+5}$.
4. Die Intervallzyklen und Fibonacci-Tonmengen sind beide arithmetische modulare Restklassenzyklen. Ich finde es interessant, dass die Intervallzyklen- sowie die Fibonacci-Sammlung alle geordneten Zweiklänge enthält.
5. In den Fibonacci-Tonklassenmengen bedeutet die rückläufige Sequenz die Inversion der definierenden Beziehung.
6. Leonhard Euler (1707 – 1783) war ein Schweizer Mathematiker, der für seine bedeutenden Arbeiten in Geometrie, Differential- und Integralrechnung sowie Zahlentheorie bekannt ist.
7. Ein vollständiges Restesystem modulo *m* ist eine Menge, die alle möglichen Restklassen von *m* enthält; z. B. {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} ist ein vollständiges Restesystem modulo 8. Die ganze Sammlung von Fibonacci-Tonklassenmengen mod *m* heißt ein vollständiges Fibonacci-System mod *m*.
8. Normalerweise wird ein reduziertes Restesystem modulo *m* durch die Eliminierung der Elemente, die nicht relativprim zu dem Modulus sind, gebildet; {3, 5, 7, 9} etwa ist ein reduziertes Restesystem modulo 8. Die Sammlung der Primmengen in einer Fibonacci-Mod *m*-Sammlung wird ein reduziertes Fibonacci-System modulo *m* genannt.
9. Zwei Zahlen sind relativprim, wenn ihr einziger gemeinsamer Teiler 1 ist.

10. Die längste Periode, die eine Fibonacci-Sequenz modulus *m* haben kann, ist die Periode der klassischen Fibonacci-Sequenz modulo *m*. Einen fesselnden Beweis dafür findet man in dem Buch *Fibonacci and Lucas Numbers and the Golden Section* von Steven Vadja.
11. In der Mod 24-Sammlung sehen diese Sequenzen aus, als wären sie mit 2 multipliziert worden.
12. In der Mod 12-Sammlung gibt es 55 Paare gleichbleibender Dreiklänge, die einander nicht schneiden. Da die Mod 8-Sammlung die einzige Untermenge ist, die die Mod 24-Sammlung nicht enthält, sind die 18 übrigen gleichbleibenden Dreiklänge in den Mod 8-Primmengen zu finden. 190 + 55 + 18 = 263.
13. Die sich daraus ergebende Tonmenge interessiert den Verfasser nicht; der Leser wird angehalten, das Ergebnis der Teilung von f1 (mod 12) durch 2 nicht zu erforschen.
14. Viele sind an dieser Stimmung interessiert, weil sie in diatonischer Tonalität funktionieren kann und weil viele Intervalle davon fast 'rein' sind. Ich interessiere mich dafür, weil sie eine Prim-Stimmung ist. Obgleich die Neunzehntonstimmung in diatonischer Tonalität tatsächlich sehr ähnlich wie die Zwölftonstimmung funktioniert, wird hier gezeigt, wie anders sie in chromatischer und mathematischer Musik funktioniert. Einige Komponisten, die unter anderen diese Skala gebraucht haben, sind: Easley Blackwood, Alois Hába, Joseph Yasser, und Ivan Wyschnegradsky.
15. Prime Moduli waren Objekt zahlreicher Forschungen zur Fibonacci-Sequenz. Die wichtigsten Arbeiten zu dem Thema sind Walls *Fibonacci Series Modulo m* und Bruckners *Fibonacci Sequence Modulo A Prime p ≡ 3 (mod 4)*.
16. Bruckners Satz 1970.
17. 0 kann nicht (m – 1)-mal in einer Sammlung mit einem nonprimen Modulus vorkommen; Moduli, die nicht prim sind, verursachen, dass 0 überhaupt in irgendeiner Sammlung (zusätzlich zu f0) vorkommt; ferner kommt 0 in den Untermengen (inklusive f0) $m - ø(m)$-mal vor.
18. $(1 + \sqrt{5})/ 2$ = 1,6180339887498948482045868343 66….

Zitierte Werke

Bruckner, G. 1970. Fibonacci Sequence Modulo A Prime p ≡ 3 (mod 4). *Fibonacci Quarterly* 8:217-220.

Mongoven, Casey. 2000. Fibonacci-Tonmengen.

Read, Gardner. 1990. *20th Century Microtonal Notation*. New York: Greenwood Press.

Vadja, Steven. 1989. *Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section: Theory and Applications*. New York: Halsted Press.

Wall, D. D. 1960. Fibonacci Series Modulo m. *American Mathematical Monthly* 67:525-532.

Table 1
Fibonacci Mod 24 Collection

f0 0

f1 0 1 1 2 3 5 8 13 21 10 7 17 0 17 17 10 3 13 16 5 21 2 23 1
0 23 23 22 21 19 16 11 3 14 17 7 0 7 7 14 21 11 8 19 3 22 1 23

f2 0 2 2 4 6 10 16 2 18 20 14 10 0 10 10 20 6 2 8 10 18 4 22 2
0 22 22 20 18 14 8 22 6 4 10 14 0 14 14 4 18 22 16 14 6 20 2 22

f3 0 3 3 6 9 15 0 15 15 6 21 3
0 21 21 18 15 9 0 9 9 18 3 21

f4 0 4 4 8 12 20 8 4 12 16 4 20 0 20 20 16 12 4 16 20 12 8 20 4

f5 0 5 5 10 15 1 16 17 9 2 11 13 0 13 13 2 15 17 8 1 9 10 19 5
0 19 19 14 9 23 8 7 15 22 13 11 0 11 11 22 9 7 16 23 15 14 5 19

f6 0 6 6 12 18 6
0 18 18 12 6 18

f8 0 8 8 16 0 16 16 8

f12 0 12 12

l1 2 1 3 4 7 11 18 5 23 4 3 7 10 17 3 20 23 19 18 13 7 20 3 23
22 23 21 20 17 13 6 19 1 20 21 17 14 7 21 4 1 5 6 11 17 4 21 1

l2 4 2 6 8 16 22 12 10 22 8 6 16 20 10 6 16 22 14 12 2 14 16 6 22
20 22 18 16 10 2 12 14 2 16 18 10 4 14 18 8 2 10 12 22 10 8 18 2

l3 6 3 9 12 21 9 6 15 21 12 9 21
18 21 15 12 3 15 18 9 3 12 15 3

l5 10 5 15 20 11 7 18 1 19 20 15 11 2 13 15 4 19 23 18 17 11 4 15 19
14 19 9 4 13 17 6 23 5 4 9 13 22 11 9 20 5 1 6 7 13 20 9 5

Table 1 (cont.)

	3	1	4	5	9	14	23	13	12	1	13	14	3	17	20	13	9	22	7	5	12	17	5	22
e1																								
	21	23	20	19	15	10	1	11	12	23	11	10	21	7	4	11	15	2	17	19	12	7	19	2
	15	5	20	1	21	22	19	17	12	5	17	22	15	13	4	17	21	14	11	1	12	13	1	14
e5																								
	9	19	4	23	3	2	5	7	12	19	7	2	9	11	20	7	3	10	13	23	12	11	23	10
	5	2	7	9	16	1	17	18	11	5	16	21	13	10	23	9	8	17	1	18	19	13	8	21
m1																								
	19	22	17	15	8	23	7	6	13	19	8	3	11	14	1	15	16	7	23	6	5	11	16	3
	1	10	11	21	8	5	13	18	7	1	8	9	17	2	19	21	16	13	5	18	23	17	16	9
m5																								
	23	14	13	3	16	19	11	6	17	23	16	15	7	22	5	3	8	11	19	6	1	7	8	15

to accompany pg. 1

Table 2
Fibonacci Mod 24 Collection

-f0 0

-f1
0 1 23 2 21 5 16 13 3 10 17 17 0 17 7 10 21 13 8 5 3 2 1 1
0 23 1 22 3 19 8 11 21 14 7 7 0 7 17 14 3 11 16 19 21 22 23 23

-f2
0 2 22 4 18 10 8 2 6 20 10 10 0 10 14 20 18 2 16 10 6 4 2 2
0 22 2 20 6 14 16 22 18 4 14 14 0 14 10 4 6 22 8 16 18 20 22 22

-f3
0 3 21 6 15 15 0 15 9 6 3 3
0 21 3 18 9 9 0 9 15 18 21 21

-f4 0 4 20 8 12 20 16 4 12 16 20 20 0 20 4 16 12 4 8 20 12 8 4 4

-f5
0 5 19 10 9 1 8 17 15 2 13 13 0 13 11 2 9 17 16 1 15 10 5 5
0 19 5 14 15 23 16 7 9 22 11 11 0 11 13 22 15 7 8 23 9 14 19 19

-f6
0 6 18 12 6 6
0 18 6 12 18 18

-f8 0 8 16 16 0 16 8 8

-f12 0 12 12

-l1
2 23 3 20 7 13 18 19 23 20 3 17 10 7 3 4 23 5 18 11 7 4 3 1
22 1 21 4 17 11 6 5 1 4 21 7 14 17 21 20 1 19 6 13 17 20 21 23

-l2
4 22 6 16 14 2 12 14 22 16 6 10 20 16 6 8 22 10 12 22 16 8 6 2
20 2 18 8 10 22 12 10 2 8 18 14 4 10 18 16 2 14 12 2 10 16 18 22

-l3
6 21 9 12 21 15 6 9 21 12 9 3
18 3 15 12 3 9 18 15 3 12 15 21

-l5
10 19 15 4 11 17 18 23 19 4 15 13 2 11 15 20 19 1 18 7 11 20 15 5
14 5 9 20 13 7 6 1 5 20 9 11 22 13 9 4 5 23 6 17 13 4 9 19

Table 2 (cont.)

	3	22	5	17	12	5	7	22	9	13	20	17	3	14	13	1	12	13	23	14	9	5	4	1
-e1																								
	21	2	19	7	12	19	17	2	15	11	4	7	21	10	11	23	12	11	1	10	15	19	20	23
	15	14	1	13	12	1	11	15	21	17	4	13	15	22	17	5	12	17	19	22	21	1	20	5
-e5																								
	9	10	23	11	12	23	13	10	3	7	20	11	9	2	7	19	12	7	5	2	3	23	4	19
	5	21	8	13	19	18	1	17	8	9	23	10	13	21	16	5	11	18	17	1	16	9	7	2
-m1																								
	19	3	16	11	5	6	23	7	16	15	1	14	11	3	8	19	13	6	7	23	8	15	17	22
	1	9	16	17	23	18	5	13	16	21	19	2	17	9	8	1	7	18	13	5	8	21	11	10
-m5																								
	23	15	8	7	1	6	19	11	8	3	5	22	7	15	16	23	17	6	11	19	16	3	13	14

to accompany pg. 1

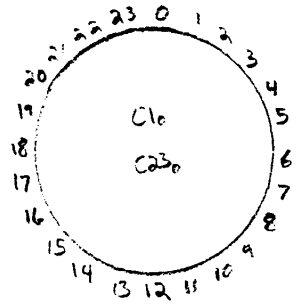
Table 3
Occurrences of Residue n in Prime Sets

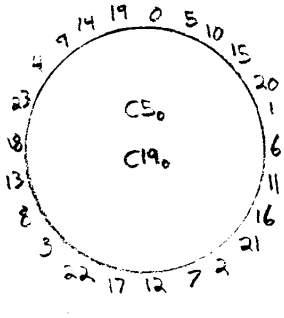
n - # of occurrences

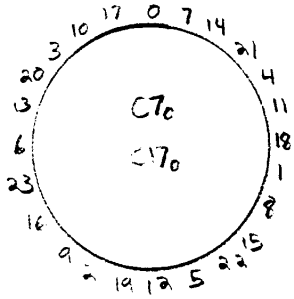
f1	f5	l1	l5	e1	e5	m1	m5
0 - 2	0 - 2	0 -	0 -	0 -	0 -	0 -	0 -
1 - 3	1 - 2	1 - 1	1 - 1	1 - 2	1 - 3	1 - 2	1 - 2
2 - 2	2 - 2	2 - 1	2 - 1	2 -	2 -	2 - 1	2 - 1
3 - 2	3 -	3 - 4	3 -	3 - 2	3 -	3 -	3 -
4 -	4 -	4 - 2	4 - 2	4 - 1	4 - 1	4 -	4 -
5 - 2	5 - 3	5 - 1	5 - 1	5 - 3	5 - 2	5 - 2	5 - 2
6 -	6 -	6 -	6 -	6 -	6 -	6 -	6 -
7 - 1	7 -	7 - 3	7 - 1	7 - 1	7 -	7 - 1	7 - 1
8 - 1	8 - 1	8 -	8 -	8 -	8 -	8 - 2	8 - 2
9 -	9 - 2	9 -	9 -	9 - 2	9 -	9 - 2	9 - 2
10 - 2	10 - 2	10 - 1	10 - 1	10 -	10 -	10 - 1	10 - 1
11 -	11 - 1	11 - 1	11 - 3	11 -	11 - 1	11 - 1	11 - 1
12 -	12 -	12 -	12 -	12 - 2	12 - 2	12 -	12 -
13 - 2	13 - 3	13 - 1	13 - 1	13 - 3	13 - 2	13 - 2	13 - 2
14 -	14 -	14 -	14 -	14 - 2	14 - 2	14 -	14 -
15 -	15 - 2	15 -	15 - 4	15 -	15 - 2	15 -	15 -
16 - 1	16 - 1	16 -	16 -	16 -	16 -	16 - 2	16 - 2
17 - 3	17 - 2	17 - 1	17 - 1	17 - 2	17 - 3	17 - 2	17 - 2
18 -	18 -	18 - 2	18 - 2	18 -	18 -	18 - 2	18 - 2
19 -	19 - 1	19 - 1	19 - 3	19 -	19 - 1	19 - 1	19 - 1
20 -	20 -	20 - 2	20 - 2	20 - 1	20 - 1	20 -	20 -
21 - 2	21 -	21 -	21 -	21 -	21 - 2	21 - 2	21 - 2
22 -	22 -	22 -	22 -	22 - 2	22 - 2	22 -	22 -
23 - 1	23 -	23 - 3	23 - 1	23 - 1	23 -	23 - 1	23 - 1

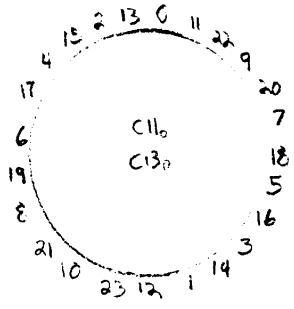
to accompany pg. 2

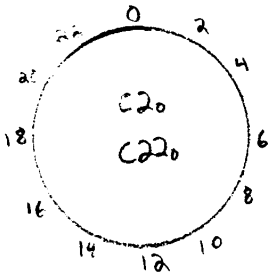
Table 4
Mod 24 Interval Cycles

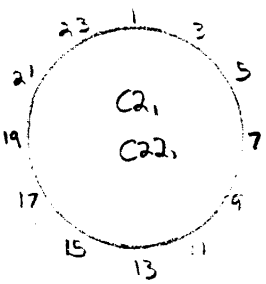


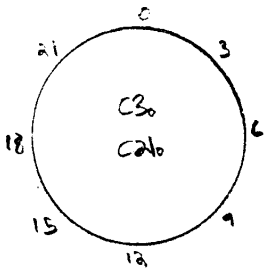


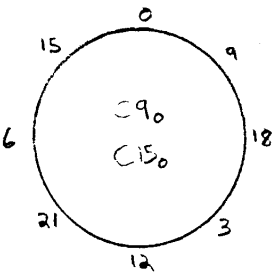


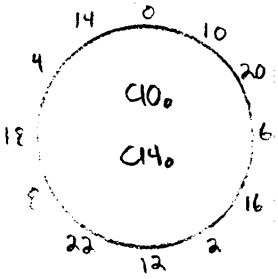


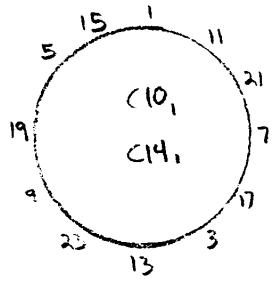


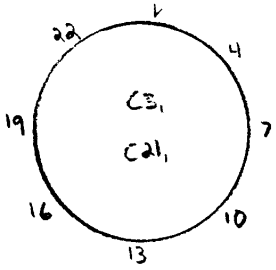


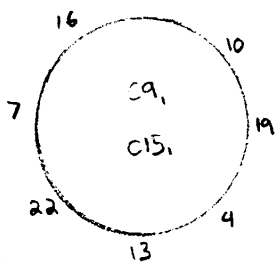


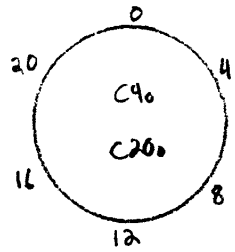


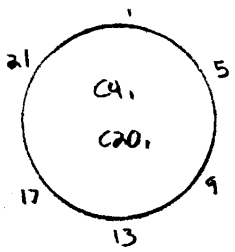


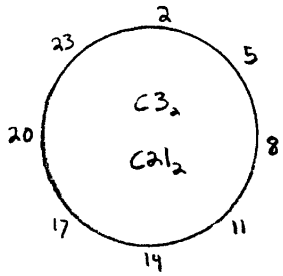


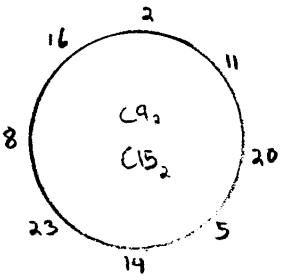


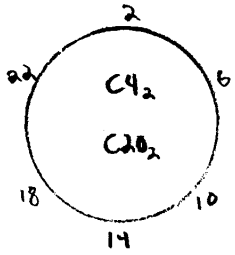












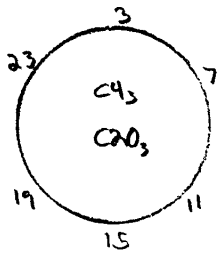
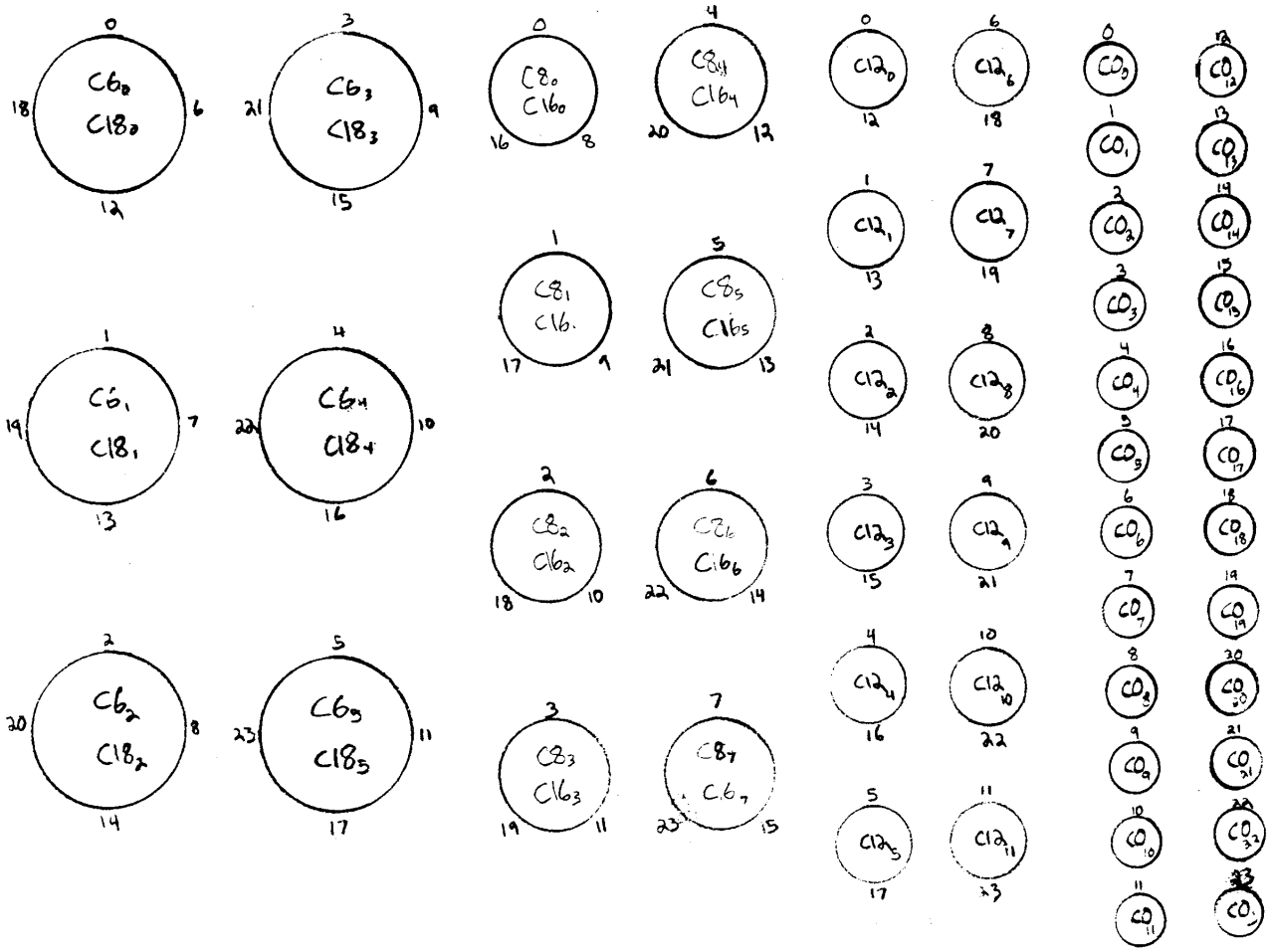
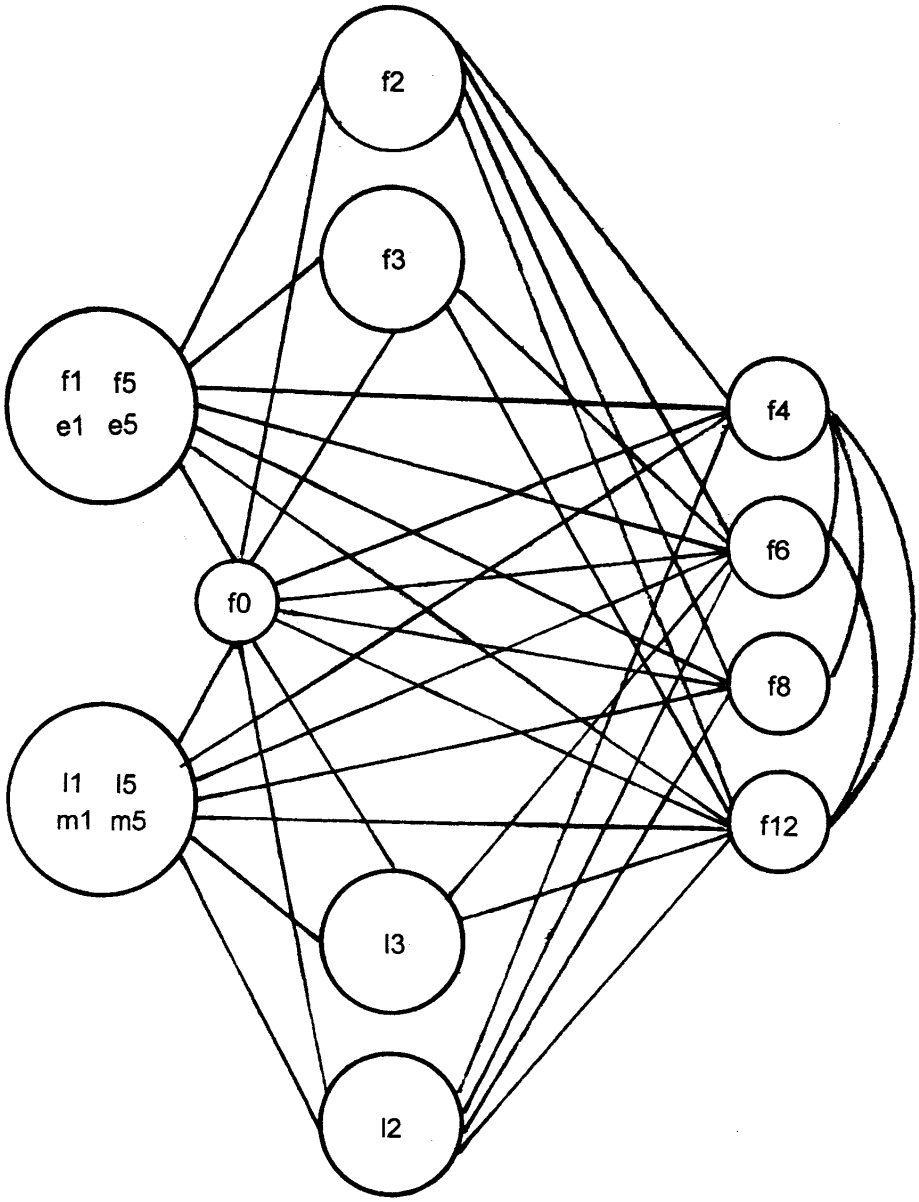


Table 4 (cont.)



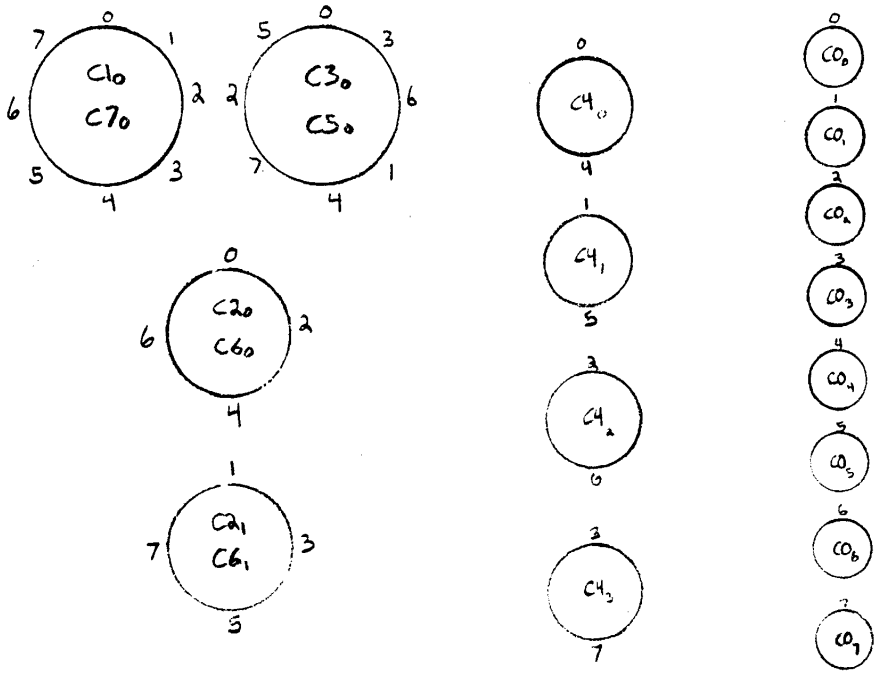
to accompany pg. 3

Table 5
Subsets and Supersets



to accompany pg. 4

Table 6
Mod 8 Interval Cycles



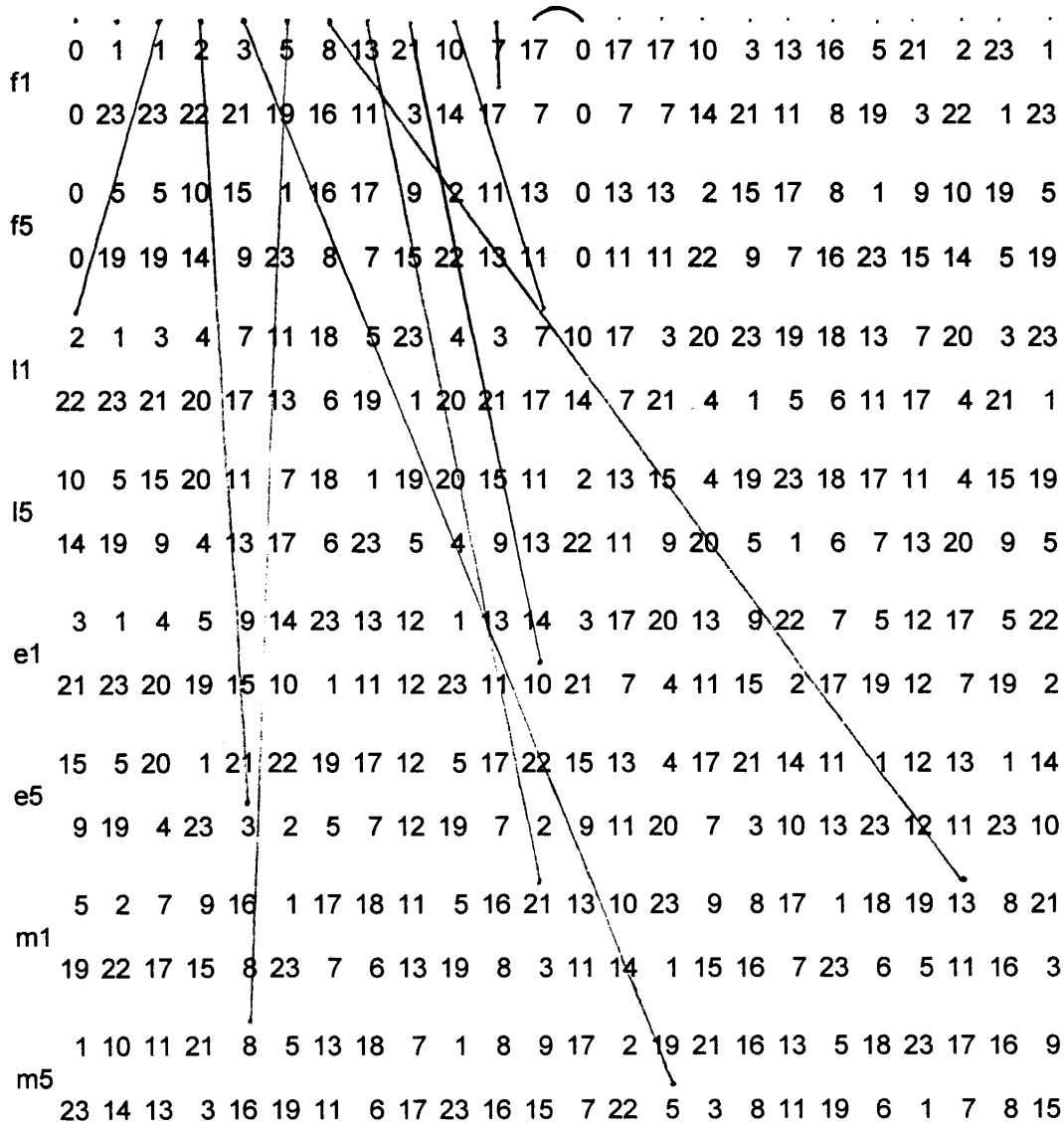
to accompany pg. 4

Table 7
Fibonacci Modulo 8 Collection

f0	0	-f0 0
f1	0 1 1 2 3 5 0 5 5 2 7 1 0 7 7 6 5 3 0 3 3 6 1 7	-f1 0 1 7 2 5 5 0 5 3 2 1 0 7 1 6 3 3 0 3 5 6 7
l1	2 1 3 4 7 3 2 5 7 4 3 7 6 7 5 4 1 5 6 3 1 4 5 1	-l1 2 7 3 4 7 5 2 3 7 4 3 6 1 5 4 1 3 6 5 1 4 5
f2	0 2 2 4 6 2 0 6 6 4 2 6	-f2 0 2 6 4 2 2 0 6 2 4 6 6
f4	0 4 4	-f4 0 4 4

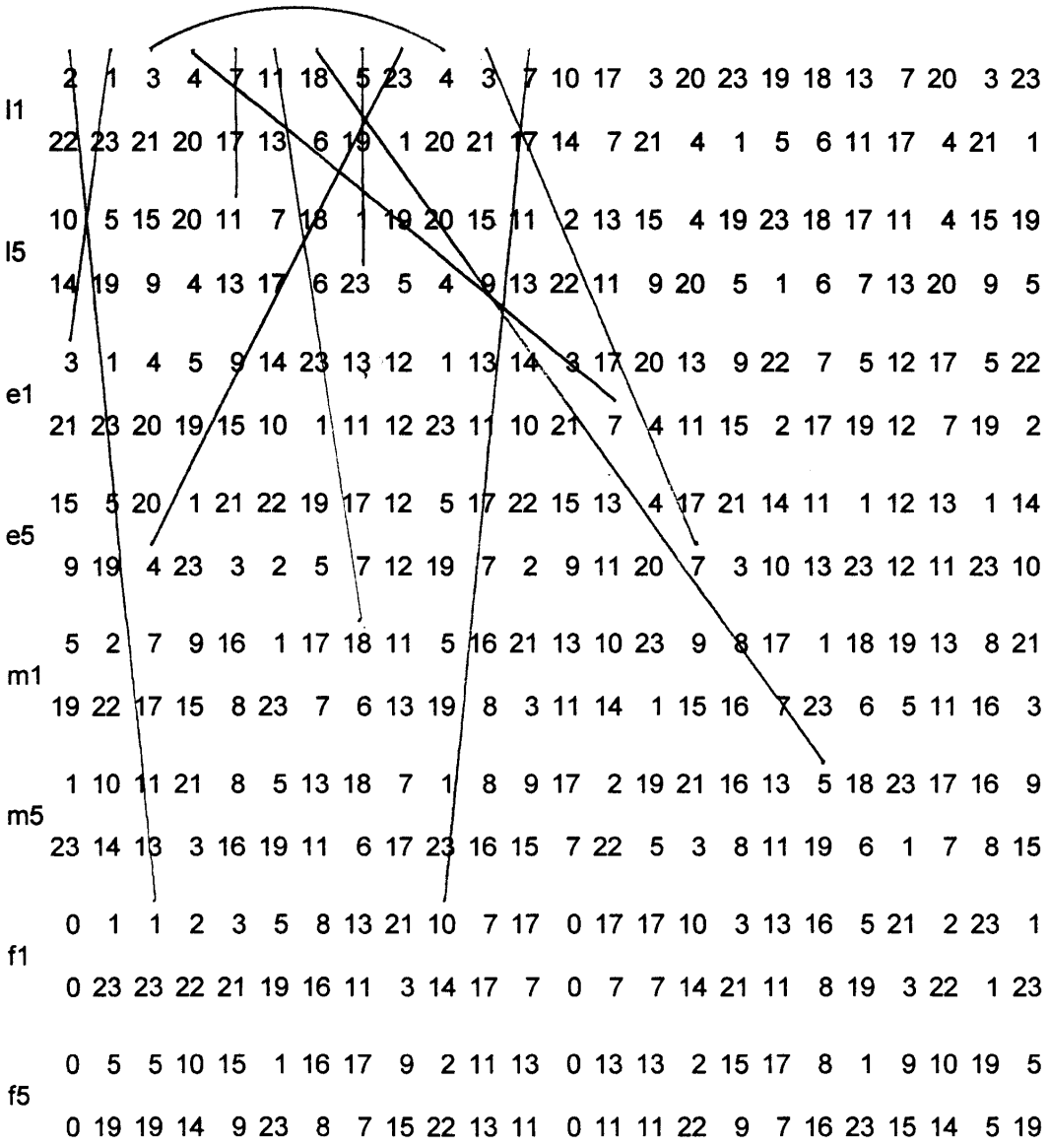
to accompany pg. 5

Table 8
Invariant Trichords of f1 and f5



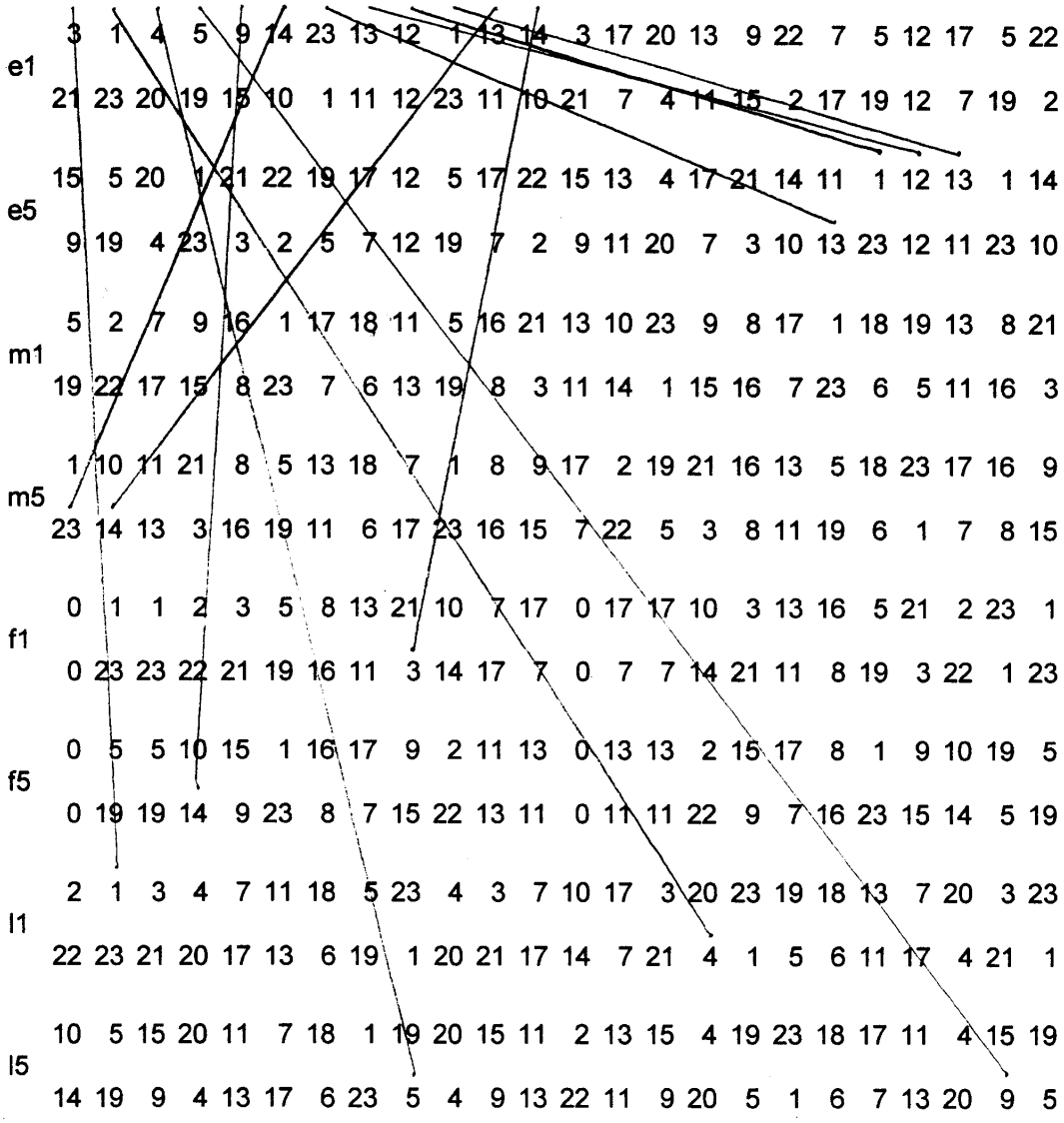
to accompany pg. 5

Table 8 (cont.)
Invariant Trichords of I1 and I5



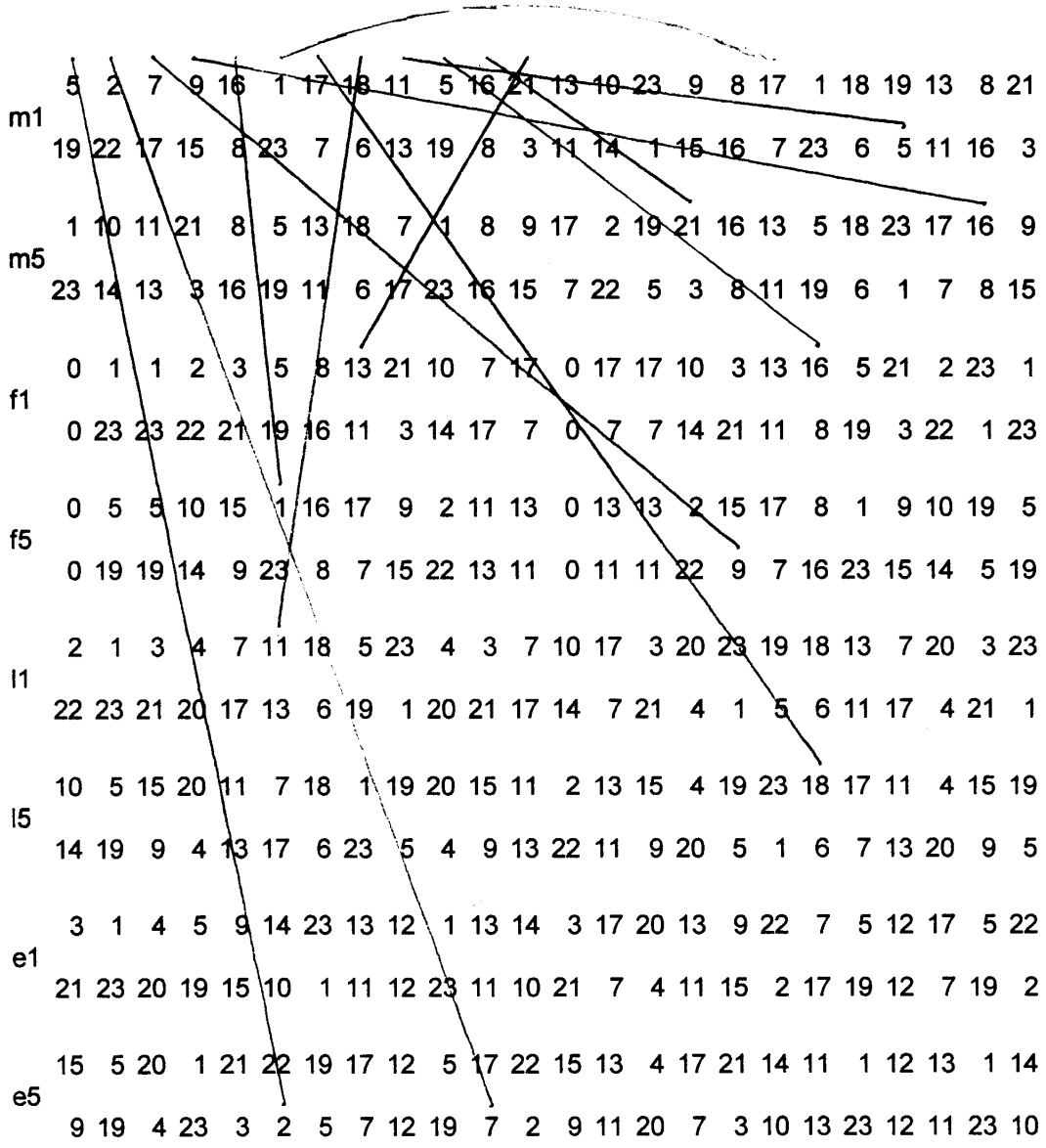
to accompany pg. 5

Table 8 (cont.)
Invariant Trichords of e1 and e5



to accompany pg. 5

Table 8 (cont.)
Invariant Trichords of m1 and m5



to accompany pg. 5

Table 9
Invariant Tetrachords

	0	1	1	2	3	5	8	13	21	10	7	17	0	17	17	10	3	13	16	5	21	2	23	1
f1																								
	0	23	23	22	21	19	16	11	3	14	17	7	0	7	7	14	21	11	8	19	3	22	1	23
	0	5	5	10	15	1	16	17	9	2	11	13	0	13	13	2	15	17	8	1	9	10	19	5
f5																								
	0	19	19	14	9	23	8	7	15	22	13	11	0	11	11	22	9	7	16	23	15	14	5	19
	2	1	3	4	7	11	18	5	23	4	3	7	10	17	3	20	23	19	18	13	7	20	3	23
l1																								
	22	23	21	20	17	13	6	19	1	20	21	17	14	7	21	4	1	5	6	11	17	4	21	1
	10	5	15	20	11	7	18	1	19	20	15	11	2	13	15	4	19	23	18	17	11	4	15	19
l5																								
	14	19	9	4	13	17	6	23	5	4	9	13	22	11	9	20	5	1	6	7	13	20	9	5
	3	1	4	5	9	14	23	13	12	1	13	14	3	17	20	13	9	22	7	5	12	17	5	22
e1																								
	21	23	20	19	15	10	1	11	12	23	11	10	21	7	4	11	15	2	17	19	12	7	19	2
	15	5	20	1	21	22	19	17	12	5	17	22	15	13	4	17	21	14	11	1	12	13	1	14
e5																								
	9	19	4	23	3	2	5	7	12	19	7	2	9	11	20	7	3	10	13	23	12	11	23	10
	5	2	7	9	16	1	17	18	11	5	16	21	13	10	23	9	8	17	1	18	19	13	8	21
m1																								
	19	22	17	15	8	23	7	6	13	19	8	3	11	14	1	15	16	7	23	6	5	11	16	3
	1	10	11	21	8	5	13	18	7	1	8	9	17	2	19	21	16	13	5	18	23	17	16	9
m5																								
	23	14	13	3	16	19	11	6	17	23	16	15	7	22	5	3	8	11	19	6	1	7	8	15

to accompany pg. 5

Table 10
Mod 24 Lucas Pitch Sets

				123	-76	47	-29	18	-11	7	-4	3	-1	**2**	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199
			123	-76	47	-29	18	-11	7	-4	3	-1	2	**1**	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	
		123	-76	47	-29	18	-11	7	-4	3	-1	2	1	**3**	4	7	11	18	29	47	76	123	199		
	123	-76	47	-29	18	-11	7	-4	3	-1	2	1	3	**4**	7	11	18	29	47	76	123	199			
123	-76	47	-29	18	-11	7	-4	3	-1	2	1	3	4	**7**	11	18	29	47	76	123	199				
123	-76	47	-29	18	-11	7	-4	3	-1	2	1	3	4	7	**11**	18	29	47	76	123	199	166			
									-119	75	-44	31	-13	**18**	5	23	28	51	79	130	209				
								-119	75	-44	31	-13	18	**5**	23	28	51	79	130	209					
										103	-61	42	-19	**23**	4	27	31	58	89	147					
					-126	77	-49	28	-17	11	-6	5	-1	**4**	3	7	10	17	27	44	71	115	186		
				-126	77	-49	28	-17	11	-6	5	-1	4	**3**	7	10	17	27	44	71	115	186			
			-126	77	-49	28	-17	11	-6	5	-1	4	3	**7**	10	17	27	44	71	115	186				
		-126	77	-49	28	-17	11	-6	5	-1	4	3	7	**10**	17	27	44	71	115	186					
									-121	76	-45	31	-14	**17**	3	20	23	43	66	109	175				
								-121	76	-45	31	-14	17	**3**	20	23	43	66	109	175					
							-121	76	-45	31	-14	17	3	**20**	23	43	66	109	175						
									-89	58	-31	27	-4	**23**	19	42	61	103	164						
								103	-62	41	-21	20	-1	**19**	18	37	55	92	147						
								130	-79	51	-28	23	-5	**18**	13	31	44	75	119	194					
								113	-69	44	-25	19	-6	**13**	7	20	27	47	74	121	195				
							113	-69	44	-25	19	-6	13	**7**	20	27	47	74	121	195					
										91	-54	37	-17	**20**	3	23	26	49	75	124	199				
									91	-54	37	-17	20	**3**	23	26	49	75	124	199					
										109	-65	44	-21	**23**	2	25	27	52	79	131	210				

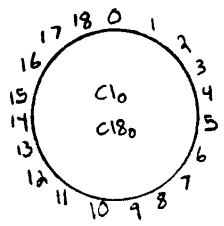
to accompany pg. 6

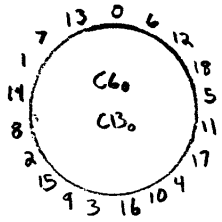
Table 11
Mod 24 Inverse Fibonacci Pitch Sets

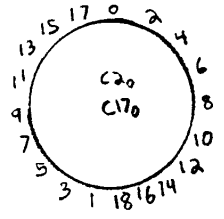
							144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1	**0**	1	-1	2	-3	5	-8	13	-21	34	-55	89							
						144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1	0	**1**	-1	2	-3	5	-8	13	-21	34	-55	89							
					144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1	0	1	**-1**	2	-3	5	-8	13	-21	34	-55	89							
				144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1	0	1	-1	**2**	-3	5	-8	13	-21	34	-55	89							
			144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1	0	1	-1	2	**-3**	5	-8	13	-21	34	-55	89							
		144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1	0	1	-1	2	-3	**5**	-8	13	-21	34	-55	89							
	144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1	0	1	-1	2	-3	5	**-8**	13	-21	34	-55	89							
144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	1	0	1	-1	2	-3	5	-8	**13**	-21	34	55	89							
													-193	-118	-75	-43	-32	-11	**-21**	10	-31	41	-72	113							
												123	74	49	29	16	13	3	**10**	-7	17	-24	41	-63	106							
											123	74	49	29	16	13	3	10	**-7**	17	-24	41	-63	106							
													221	136	85	51	34	17	**17**	0	17	-17	34	-51	85	-136						
												221	136	85	51	34	17	17	**0**	17	-17	34	-51	85	-136						
											221	136	85	51	34	17	17	0	**17**	-17	34	-51	85	-136						
													-141	-86	-55	-31	-24	-7	**-17**	10	-27	37	-64	101							
												171	106	65	41	24	17	7	**10**	-3	13	-16	29	-45	74	-119						
											171	106	65	41	24	17	7	10	**-3**	13	-16	29	-45	74	-119						
										171	106	65	41	24	17	7	10	-3	**13**	-16	29	-45	74	-119						
													-168	-103	-65	-38	-27	-11	**-16**	5	-21	26	-47	73	-120						
												-168	-103	-65	-38	-27	-11	-16	**5**	-21	26	-47	73	-120						
														-158	-99	-59	-40	-19	**-21**	2	-23	25	-48	73	-121						
													-158	-99	-59	-40	-19	-21	**2**	-23	25	-48	73	-121						
														-179	-112	-67	-45	-22	**-23**	1	-24	25	-49	74	-121						
								144	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	**1**	0	1	-1	2	-3	5	-8	13	-21	34	-55						

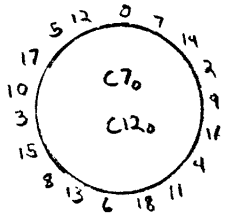
to accompany pg. 6

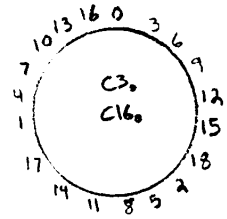
Table 12
Mod 19 Interval Cycles

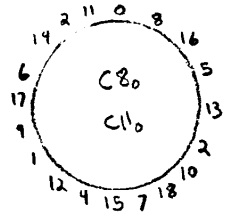


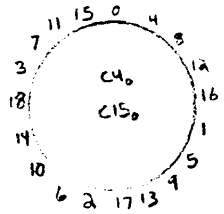


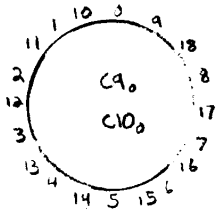


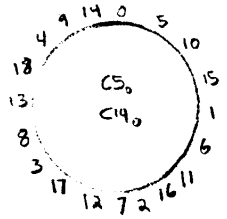














to accompany pg. 7

Table 13
Fibonacci Mod 19

f0	0																	
f1	0	1	1	2	3	5	8	13	2	15	17	13	11	5	16	2	18	1
	0	18	18	17	16	14	8	6	17	4	2	6	8	14	3	17	1	18
f2	0	2	2	4	6	10	16	7	4	11	15	7	3	10	13	4	17	2
	0	17	17	15	13	9	3	12	15	8	4	12	16	9	4	15	2	17
f3	0	3	3	6	9	15	5	1	6	7	13	1	14	15	10	6	16	3
	0	16	16	13	10	4	14	18	13	12	6	18	5	4	9	13	3	16
f4	0	4	4	8	12	1	13	14	8	3	11	14	6	1	7	8	15	4
	0	15	15	11	7	18	6	5	11	16	8	5	13	18	12	11	4	15
f5	0	5	5	10	15	6	2	8	10	18	9	8	17	6	4	10	14	5
	0	14	14	9	4	13	17	11	9	1	10	11	2	13	15	9	5	14
f6	0	6	6	12	18	11	10	2	12	14	7	2	9	11	1	12	13	6
	0	13	13	7	1	8	9	17	7	5	12	17	10	8	18	7	6	13
f7	0	7	7	14	2	16	18	15	14	10	5	15	1	16	17	14	12	7
	0	12	12	5	17	3	1	4	5	9	14	4	18	3	2	5	7	12
f8	0	8	8	16	5	2	7	9	16	6	3	9	12	2	14	16	11	8
	0	11	11	3	14	17	12	10	3	13	16	10	7	17	5	3	8	11
f9	0	9	9	18	8	7	15	3	18	2	1	3	4	7	11	18	10	9
	0	10	10	1	11	12	4	16	1	17	18	16	15	12	8	1	9	10
g1	4	1	5	6	11	17	9	7	16									
	15	18	14	13	8	2	10	12	3									
h1	4	3	7	10	17	8	6	14	1	15	16	12	9	2	11	13	5	18

to accompany pg. 7